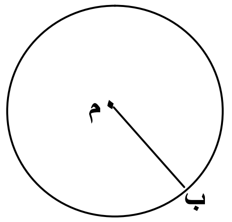
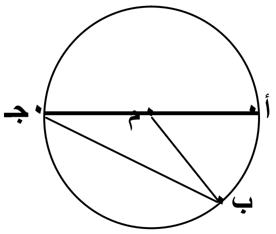
تعاريف ومفاهيم أساسية علي الدائرة



الدائرة :

هي مجموعة نقاط المستوى التى تبعد بعدا ثابت عن نقطة ثابتة تسمي مركز الدائرة (م)

ويسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة (نق = م ب)



نصف القطر :

هو القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز الدائرة وأي نقطة علي الدائرة (م ب ، م أ ، م جـ)

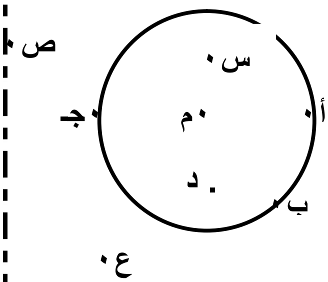
الوتر :

هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين علي الدائرة ولا يمر بالمركز (ب جـ)

القطر :

هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين علي الدائرة و يمر بالمركز ويعتبر أكبر أوتار الدائرة طولاً (أ جـ)

طول القطر = ٢نق (أ جـ = ٢ م ب)



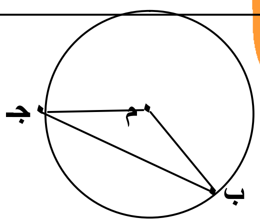
تجزئة الدائرة : الدائرة تقسم نقاط أي مستوي إلي ثلاث مجموعات غير منتهية من النقاط .

١- مجموعة النقاط داخل الدائرة (م ، س ، ع ، ....)

٢- مجموعة النقاط علي الدائرة (أ ، ب ، جـ ، ....)

٣- مجموعة النقاط خارج الدائرة (ن ، ع ، ص ، ....)

سطح الدائرة = مجموعة النقاط داخل الدائرة U مجموعة النقاط علي الدائرة



ملحوظة : أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متساوية الطول

∵ Δ ب م جـ فيه م ب = م جـ أنصاف أقطار

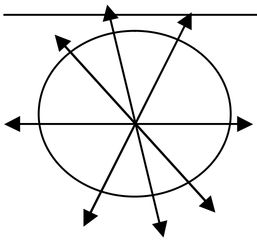
∴ ق (< م ب جـ) = ق (< م جـ ب)

ملحوظة : محيط الدائرة = ٢ π نق = π × طول القطر ، مساحة الدائرة = π نق٢

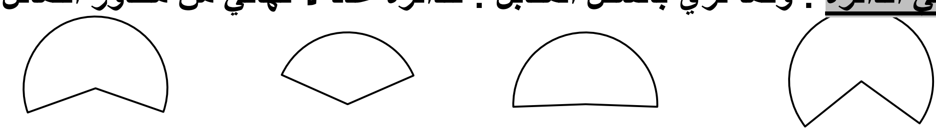
∵ محيط الدائرة = π × ☐ ∵ مساحة الدائرة = π × ☐

∴ نق = ☐/٢ ∴ نق = √☐

التماثل في الدائرة : وكما تري بالشكل المقابل : للدائرة عدد لا نهائي من محاور التماثل



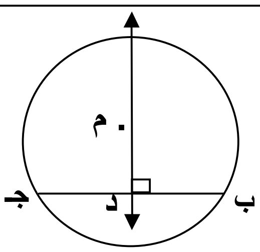
ولكن



(٣/٤ الدائرة) (١/٢ الدائرة) (١/٣ الدائرة) (٢/٣ الدائرة)

أي جزء من الدائرة له(محـــــــــــــــــــــــــــــــور واحد فقط)

نتـــائج هـــامة

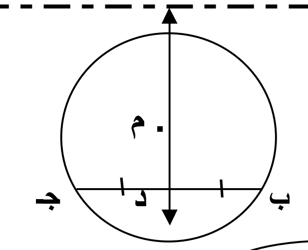


النتيجة الاولى : المستقيم المار بمراكز الدائرة عموديا علي أي وتر فيها ينصف هذا الوتر

∵ م د ⊥ ب جـ

∴ د منتصف ب جـ ⇦ ب د = د جـ

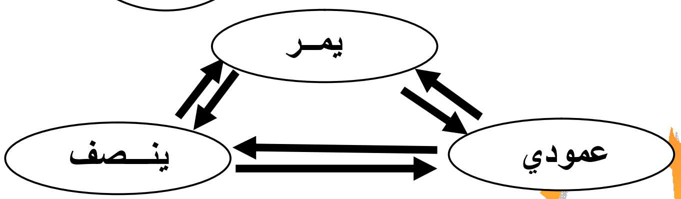
النتيجة الثانية : المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أي وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر

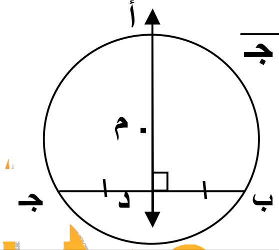


∵ د منتصف ب جـ

∴ م د ⊥ ب جـ ⇐ ق (< م د ب) = ٩٠

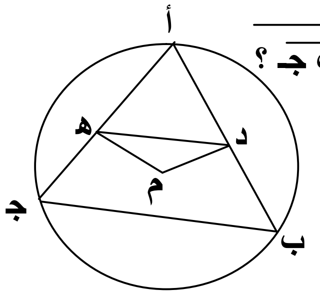
النتيجة الثالثة : المستقيم العمودي علي أي وتر من منتصفة يمر بمركز الدائرة





∵ أ د ⊥ ب جـ ، د منتصف ب جـ

∴ م تقع على أ د

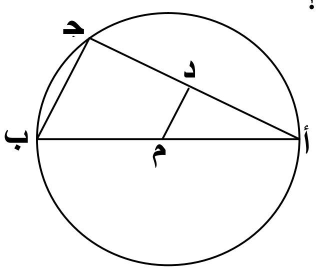


(١) Δ أ ب جـ مرسوم داخل الدائرة م فيه م د ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ اثبت أن د هـ // ب جـ ؟

البرهـان ∵ م د ⊥ أ ب ∴ د منتصف أ ب

∵ م هـ ⊥ أ جـ ∴ هـ منتصف أ جـ

∵ د منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ ∴ د هـ // ب جـ



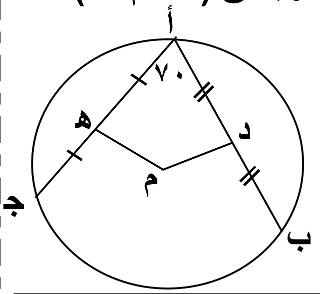
(٢) أ ب قطر في الدائرة م ، م د ⊥ أ جـ ، ب جـ = ٨سم أوجد ق (< أ جـ ب) ، طول د م ؟

البرهـان ∵ م د ⊥ أ جـ ∴ د منتصف أ جـ

∵ د منتصف أ جـ ، م منتصف القطر أ ب في الدائرة

∴ د م // ب جـ ، م د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤سم

∵ د م // ب جـ ∴ ق (< أ جـ ب) ق(< م د أ) = ٩٠ = بالتناظر



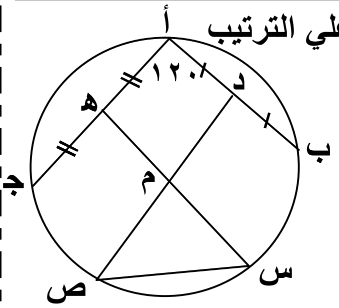
(٣) دائرة م ، أ ب ، أ جـ وتران د ، هـ منتصفات أ ب ، أ جـ على الترتيب ، ق (< أ) = ٧٠ أوجد ق (< د م هـ) ؟

البرهان ∵ د منتصف الوتر أ ب ∴ م د ⊥ أ ب ⇐ ق (< أ د م) = ٩٠

∵ هـ منتصف الوتر أ جـ ∴ م هـ ⊥ أ ب ⇐ ق (< أ هـ م) = ٩٠

∵ الشكل أ هـ م د رباعي (مجموع قياسات زواياه = ٣٦٠)

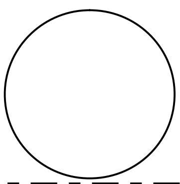
∴ ق (< م) = ٣٦٠ - (٩٠ + ٩٠ + ٧٠) = ١١٠



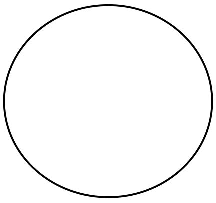
(٤) أ ب ، أ جـ وتران في دائرة م ، ق(< ب أ جـ) = ١٢٠ ، د ، هـ منتصفات أ ب ، أ جـ علي الترتيب

اثبت أن Δ م س ص متساوي الأضلاع ؟

(٥)وتر طوله ٨سم مرسوم فى دائرة طول قطرها ١٠سم فإن بعد هذا الوتر عن مركز الدائرة = ...

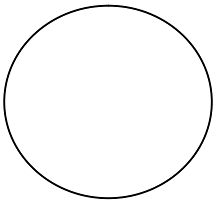


(٦) أ ب وتر في دائرة مركزها م طول أ ب = ٢٤سم ، محيط الدائرة = ٣٠π فان بعد الوتر عن المركز = ...



(٧) دائرة مركزها م ، أ ب وتر فيها فإذا كان طول أ ب = ١٢سم والبعد العمودي بين الوتر ومركز الدائرة = ٥ سم

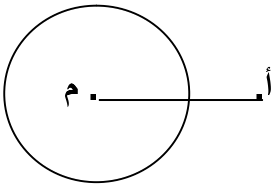
احسب محيط الدائرة ؟



(٧) إذا كان م دائرة ، أ ∋ للدائرة م فان م أ يسمي ....

(٨) سطح الدائرة = ... ∪ ....

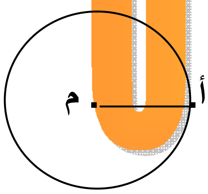
١- موضع نقطة بالنسبة لدائرة



(١) إذا كانت النقطة أ نقطة في المستوي

وكان البعد بين هذه النقطة وبين مركز الدائرة م > نصف قطر الدائرة

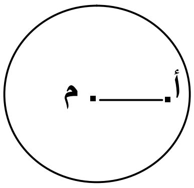
أي أن : م أ > نق فتكون النقطة أ تقع خارج الدائرة



(٢) إذا كانت النقطة أ نقطة في المستوي

وكان البعد بين هذه النقطة وبين مركز الدائرة م = نصف قطر الدائرة

أي أن : م أ = نق فتكون النقطة أ تقع علي الدائرة

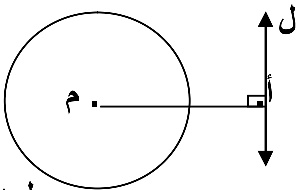


(٣) إذا كانت النقطة أ نقطة في المستوي

وكان البعد بين هذه النقطة وبين مركز الدائرة م < نصف قطر الدائرة

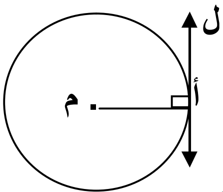
أي أن : م أ < نق فتكون النقطة أ تقع داخل الدائرة

٢- موضع مستقيم بالنسبة لدائرة



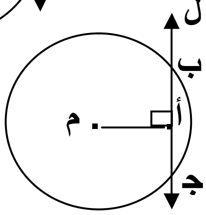
(١) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة (م) = Ø فان المستقيم يقع خارج الدائرة

ويكون م أ > نق



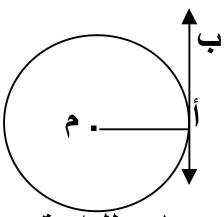
(٢) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة (م) = { أ } فان المستقيم يكون مماس للدائرة

ويكون م أ = نق



(٣) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة (م) = { جـ ، ب } فان المستقيم يكون قاطع للدائرة

ويكون م أ < نق



ملحوظة : نصف القطر عمودي علي المماس عند نقطة التماس

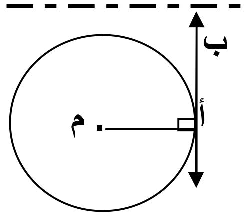
∵ أ ب مماس للدائرة عند النقطة أ

∴ م أ ⊥ أ ب ⇦ ق (∠ م أ ب) = ٩٠

ملحوظة : المستقيم العمودي علي قطر الدائرة من احدي نهايتيه يكون مماس للدائرة

∵ $\overline{\text{م أ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ



ملحوظة : المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة متوازيان

مثال : أكمل : دائرة م طول قطرها ٦ سم أكتب موضع النقطة (أ) في الحالات التالية : -

أ م = ٤ سم فان أ تكون..................   أ م = $\frac{١}{٢}$ نق فان أ تكون ....

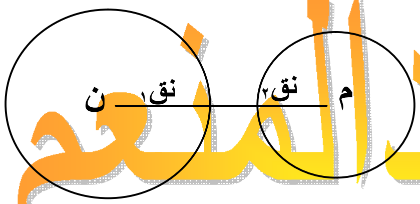
أ م = ٣ سم فان أ تكون..................   أ م = $\frac{٤}{٣}$ نق فان أ تكون ....

أ م = ٢ سم فان أ تكون.................   أ م = نق فان أ تكون ....

٣- أوضاع دائرة بالنسبة لدائرة

(١) الدائرتان المتباعدتان

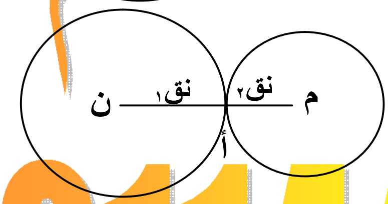
$\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ يسمى خط المركزين



م ن > نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = Ø   سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = Ø

(٢) الدائرتان المتماستان من الخارج

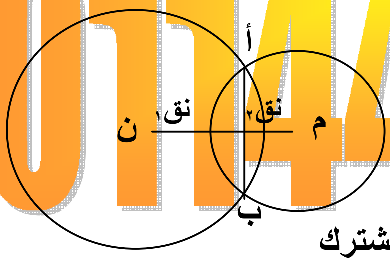


م ن = نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }   سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ }

$\overline{\text{أ ب}}$ يسمى وتر مشترك

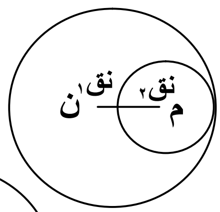
(٣) الدائرتان المتقاطعتان



نق١ - نق٢ < م ن < نق١ + نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ ، ب }   سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = الجزء المشترك

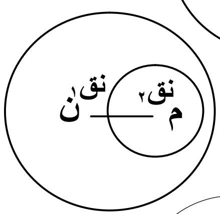
(٤) الدائرتان المتماستين من الداخل



م ن = نق١ - نق٢

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }   سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة م

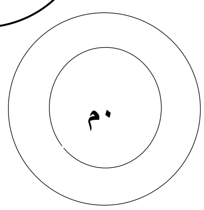
(٥) الدائرتان المتداخلتين



م ن < نق١ - نق٢

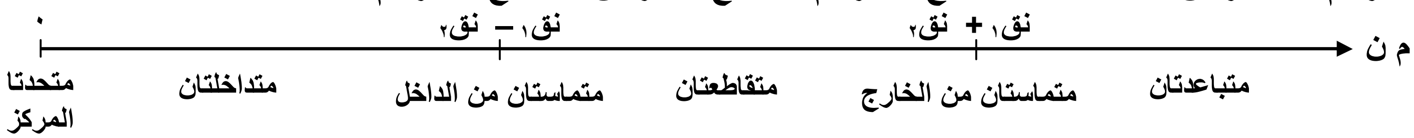
الدائرة م ∩ الدائرة ن = Ø   سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة م

(٦) الدائرتان متحدتا المركز



م ن = صفر

الدائرة م ∩ الدائرة ن = Ø   سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة م



١) إذا كانت مساحة الدائرة م = ١٦ π سم٢ ، أ نقطة فى مستويها حيث م أ = ٨ سم ، فإن أ تقع .... الدائرة م .

٢) المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة يكونان ....

٣) أ ب قطر فى الدائرة م ، أ جـ ، ب د مماسان للدائرة فإن أ جـ .... ب د .

٤) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق١، نق٢، نق١ = ٦سم ، نق٢ = ٨سم فإذا كان م ن= ١٤سم فان الدائرتين ....

٥) إذا كان طول قطر الدائرة ٨ سم ، المستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم فإن ل يكون ....

٦) دائرة طول قطرها (٢ س + ٥) سم ، المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢) سم فإن المستقيم ل يكون ....

٧) إذا كان المستقيم ل مماساً للدائرة التى قطرها ٦ سم فإنه يبعد عن مركزها مسافة ....

٨) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما نق١ ، نق٢ متماستان من الخارج نق١ = ٥ سم ، م ن= ١٣سم فان نق٢ = ...

٩) م ، ن دائرتان متقاطعتان طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٤ سم على الترتيب فإن م ن ∋ ....

١٠) إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتين م ، ن تكونان ....

١١) إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستين من الخارج وطولا نصفى قطريهما ٤ سم ، ٨ سم فإن م ن = ... سم .

١٢) م ، ن دائرتان متقاطعتان طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٥ سم فإن م ن ∋] .... ، .... [

١٣) محور تماثل الدائرتين م ، ن المتقاطعتين فى أ ، ب هو ....

١٤) دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٩ سم ، ٤ سم ، م ن = ١٣ سم فإن الدائرتان ....

١٥) المماسان المرسومان من نهايتى وتر فى الدائرة يكونان ....

١٦) عدد محاور تماثل الدائرة = ... بينما عدد محاور تماثل نصف الدائرة = ...

١٧) إذا كان م أ = نق فان النقطة أ تقع في ....

١٨) دائرتين م ، ن طولا نصفى قطريهما نق١ ، نق٢ فإذا كان نق١ - نق٢ < م ن < نق١ + نق٢ فان الدائرتين ....

١٩) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين .... ،عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الخارج ......

عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين .... ،عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الداخل ....

عدد المماسات المشتركة لدائرتين متداخلتين ....

٢٠) دائرتان متماستان من الداخل طول قطر أحداهما ١٠ سم ، م ن = ٦ سم فان طول قطر الاخري = ...

٢١) دائرة طول قطرها ٦ سم تبعد نقطة ما عن مركزها ٤سم فان النقطة تقع .... الدائرة

٢٢) دائرتين م ، ن طولا نصفى قطريهما نق١ ، نق٢ فإذا كان نق١ + نق٢ = م ن فان الدائرتين ....

٢٣) إذا كانت النقطة هـ تقع داخل الدائرة م فان م هـ .... نق (< ، > ، = ، ≤)

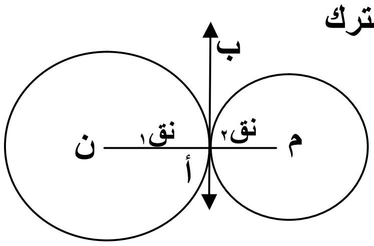
٢٤) دائرة مركزها م ومحيطها ١٤π سم ، جـ نقطة فى مستواها بحيث م جـ = ٥سم فان جـ تقع .... الدائرة

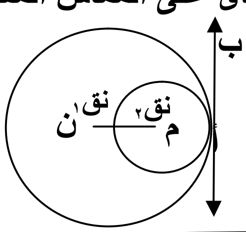
٢٥) المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون ....

نتيجة : خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل أو الخارج عمودى على المماس المشترك

∵ أ ب مماس مشترك للدائرة عند أ

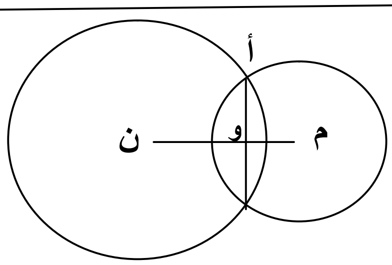
∴ م أ ⊥ أ ب ⇐ ق (∠ م أ ب) = ٩٠





نتيجة : خط المركزين لدائرتين متقاطعتين عمودى على الوتر المشترك وينصفه

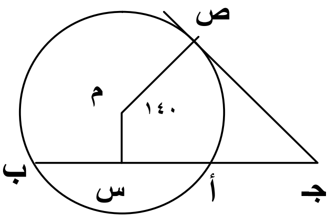
∵ أ ب وتر مشترك للدائرتين



∴ م ن ⊥ أ ب ⇐ ق (∠ م و أ) = ٩٠ ، أ و = ب و

(١) خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون .... على الوتر المشترك و ....

(٢) جـ ص مماس للدائرة م ، س منتصف أ ب ، ق(∠ ص م س) = ١٤٠، أوجد ق(∠ جـ)



البرهان ∵ جـ ص مماس للدائرة ، م ص نصف قطر

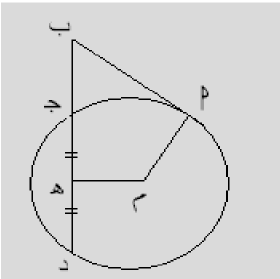
∴ م ص ⊥ جـ ص ⇐ ق(∠ م ص جـ) = ٩٠

∵ س منتصف أ ب

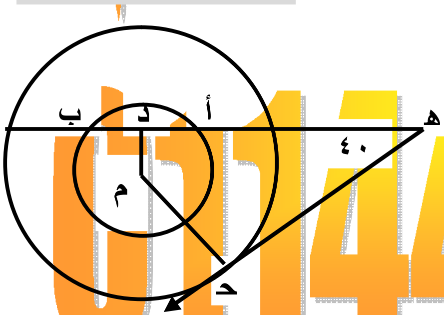
∴ م س ⊥ أ ب ⇐ ق(∠ م س جـ) = ٩٠

∵ الشكل م ص جـ س رباعي (مجموع قياسات زواياه = ٣٦٠) ∴ ق(∠ جـ)=٣٦٠ – [٩٠+٩٠+١٤٠] = ٤٠

(٣) أ ب مماس للدائرة م ، د هـ = هـ جـ ق(∠ أ ب د) = ٤٠ أوجد بالبرهان : ق(∠ أ م هـ)



(٤) هـ جـ مماس ، د منتصف أ ب أوجد ق (∠ د م جـ) ؟



تعيين الدائرة

أولا: تتعين(يمكن رسم) الدائرة بمعلومية مركزها ونصف قطرها

ثانيا: يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطة واحدة معلومة مثل أ .

ثالثا: يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطتين معلومتين مثل أ ، ب تقع مراكز هذه الدوائر على محور تماثل أ ب.

عدد الدوائر التى يمكن رسمها لتمر بطرفى أ ب معلومة الطول

نق < نصف أ ب	نق = نصف أ ب	نق > نصف أ ب
يوجد حلان	يوجد حل واحد	لا يوجد حل

مثال : بإستخدام الأدوات الهندسية إرسم أ ب = ٧سم ثم إرسم :

أ) الدائرة التى تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٤سم . ما عدد الحلول الممكنة ؟

ب) الدائرة التى تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٣,٥سم . ما عدد الحلول الممكنة ؟

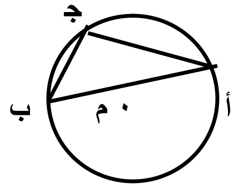
جـ) الدائرة التى تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٣سم . ما عدد الحلول الممكنة ؟

رابعا : لا يمكن رسم دائرة واحدة تمر بثلاث نقط على أستقامة واحدة

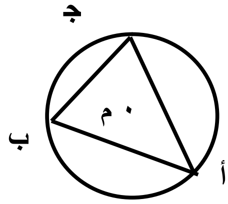
يمكن رسم دائرة وحيدة تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة مركزها نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاعه من منتصفاتها ويكون :

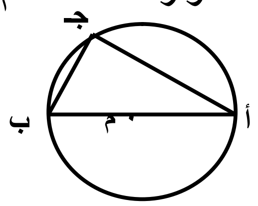
١) خارج المثلث المنفرج الزاوية



٢) داخل المثلث الحاد الزاوية



٣) منتصف وتر المثلث القائم

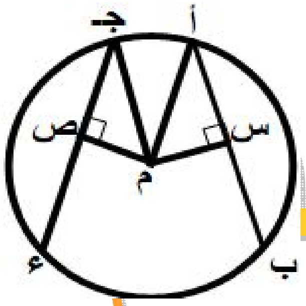


١) بإستخدام الأدوات الهندسية إرسم الدائرة المارة برءوس المثلث الذى فيه أ ب= ٣سم ، ب جـ = ٤سم ، أ جـ = ٥سم ؟

٢) بإستخدام الأدوات الهندسية إرسم الدائرة المارة برءوس المثلث الذى فيه أ ب =٥سم ، ب جـ =٦سم ، ق(< ب)=٧٠؟

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

نظرية : الأوتار المتساوية في الطول في دائرة واحدة تكون علي أبعاد عمودية متساوية من مركزها



المعطيات : أ ب ، جـ ء وتران متساويان في الدائرة م ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

المطلوب : اثبات أن م س = م ص

العمل : نصل أ م ، جـ م

البرهان : ∵ أ م ، جـ م أنصاف أقطار ∴ أ م = جـ م

∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب ⇐ أ س = ب س

∵ م ص ⊥ جـ ء ∴ ص منتصف جـ ء ⇐ جـ ص = ء ص

∵ أ ب ، جـ ء وتران متساويان ∴ أ س = جـ ص

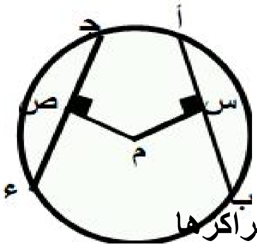
وبتطبيق Δ Δ أ س م ، جـ ص م فيهما ❶ أ س = جـ ص

❷ ق(< جـ ص م) = ق(< أ س م) = ٩٠ ْ

❸ أ م = جـ م

ومن تطابق المثلثين ينتج أن : م س = م ص

المستفاد من النظرية : إذا أعطى أ ب ، جـ ء وتران متساويان

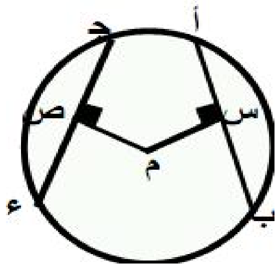


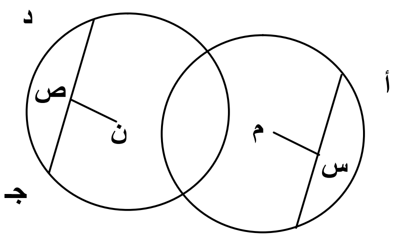
∵ أ ب = جـ ء وتران متساويان

∴ م س = م ص بعدان متساويان

نتيجة ١ : في الدوائر المتطابقة الأوتار المتساوية في الطول تكون علي أبعاد متساوية من مراكزها

عكس النظرية : في الدائرة الواحدة [أو في الدوائر المتطابقة] إذا كانت الأوتار علي أبعاد متساوية من المركز فان الأوتار تكون متساوية



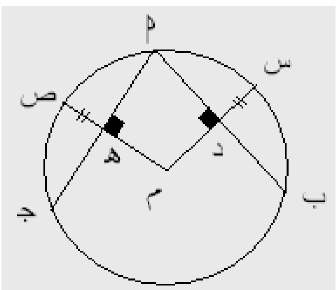


∵ م س = م ص بعدان متساويان

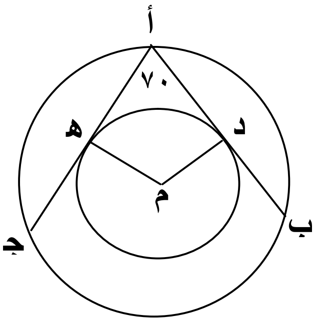
∴ ا ب = جـ د وتران متساويان

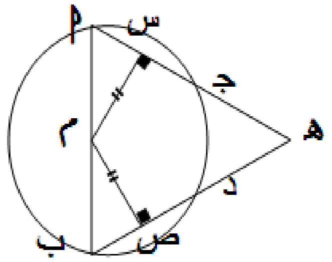
١) في الشكل المقابل : م د ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ جـ فإذا كان د س = هـ ص

اثبت أن : أ ب = أ جـ ؟



٢) دائرتان متحدتا المركز، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ مماسان للصغرى ، أوجد ق (< د م هـ) ، أثبت أن أ ب = أ جـ





١) **في الشكل المقابل** : أ ب قطر في الدائرة م ، أ جـ ، ب د وتران فيها ، م س = م ص ، م س ⊥ أ جـ ، م ص ⊥ د ب ، أ جـ ∩ ب د = {هـ}

اثبت أن : △ هـ أ ب متساوي الساقين

البرهان

بتطبيق △△ أ س م ، ب ص م

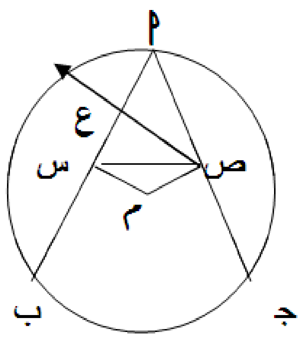
فيهما ❶ أ م = ب م

❷ س م = ص م

❸ ق(< أ س م) = ق(< ب ص م) = ٩٠°

يتطابق المثلثان وينتج أن: ق(< أ) = ق(< ب)

∴ △ أ هـ ب متساوي الساقين (هـ, م, ث) #



٢) **في الشكل المقابل**: $\overline{أ ب}$ ، أ جـ وتران متساويان في الدائرة م ، س ، ص منتصفيهما على الترتيب فإذا كان ق(< س م ص)= ١٢٠° ، ص ع ينصف (< أ ص س) اثبت أن : ص ع // م س

البرهان

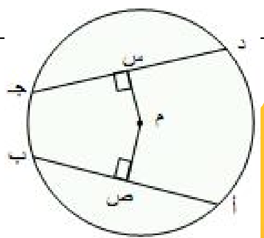
∵ $\overline{أ ب}$ ، أ جـ ∴ س م = ص م ∵ ق(< س م ص) = ١٢٠°

∴ ق(< م ص س) = ٣٠° ∵ ق(م ص أ) = ٩٠°

∴ ق(< أ ص ع) = ق(ع ص س) = ق(< س ص م) = ٣٠°

∴ ق(< ع ص س) = ق(< ص س م) = ٣٠° (في وضع تبادل)

∴ ص ع // م س (هـ, م, ث) #

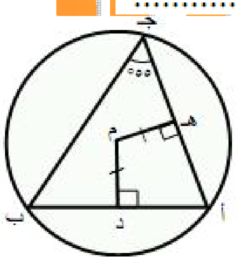


٣) فى الشكل المقابل : إذا كان : م س > م ص فإن : جـ د .... أ ب

٤) الأوتار المتساوية فى الطول فى الدائرة تكون على أبعاد ....من المركز

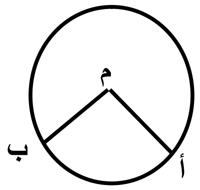
٥) الأوتار التى تكون على أبعاد متساوية فى الطول عن مركز الدائرة تكون ....

٦) فى الشكل المقابل :ق (< جـ) = ٥٥° ، م هـ = م د ، م هـ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ، م د ⊥ $\overline{أ ب}$ ∴ ق (< أ) = ...°



أ / جلال عبد المنعم : ٠١١٤٤٣٥٥١٨٠

قياس القوس: هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له



∵ (< أ م ب) مركزية تقابل (أ ب) ∴ ق (أ ب) = ق(< أ م ب)

طول القوس: هو جزء من محيط الدائرة ويقاس بوحدة قياس الأطوال

طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × محيط الدائرة = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق

مثال: دائرة مركزها م طول نصف قطرها ٢١ سم ، ا، ب نقطتان على الدائرة م بحيث ق (< ا م ب) = ١٢٠ اوجد طول أ ب

∵ (< أ م ب) مركزية تقابل (أ ب) ∴ ق (أ ب) = ق(< أ م ب) = ١٢٠

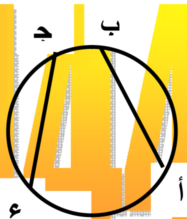
طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠}$ × ٢ π نق = $\frac{١٢٠}{٣٦٠}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ = ٤٤ سم

مثال : أوجد قياس و طول القوس الذى يمثل $\frac{٢}{٥}$ قياس الدائرة علما بأن نق = ٣٥ سم ؟

قياس القوس = $\frac{٢}{٥}$ × قياس الدائرة = $\frac{٢}{٥}$ × ٣٦٠ = ١٤٤

طول القوس = $\frac{٢}{٥}$ × ٢ π نق = $\frac{٢}{٥}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣٥ = ٨٨ سم

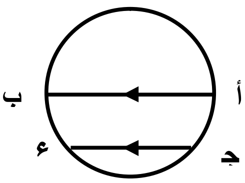
نتيجة: فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس تكون متساوية فى الطول والعكس صحيح



نتيجة: فى الدائرة الواحدة أو فى الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس تحصر أوتارا متساوية فى الطول والعكس صحيح

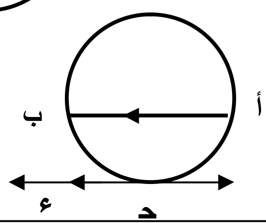
∵ ق (أ ب) = ق (جـ ء) ∴ أ ب = جـ ء والعكس

نتيجة: الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران بينهما قوسين متساويين فى القياس



∵ أ ب // جـ ء ∴ ق (أ ب) = ق (جـ ء)

نتيجة: القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه متساويان فى القياس



∵ الوتر أ ب // المماس جـ ء ∴ ق (أ جـ) = ق (ب جـ)

---

١) قوس يمثل ربع دائرة طول قطرها ١٤ سم احسب طوله وقياسه ؟

الحل : طول القوس = ربع محيط الدائرة = $\frac{١}{٤}$ × ٢ π نق = $\frac{١}{٤}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ١١ سم

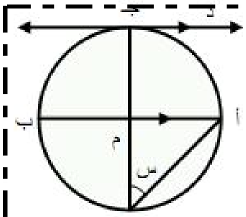
قياس القوس = $\frac{١}{٤}$ قياس الدائرة = $\frac{١}{٤}$ × ٣٦٠ = ١٢٠

٢) أوجد قياس القوس الذي يمثل $\frac{٥}{٦}$ قياس دائرة طول نصف قطر هذه الدائرة ٣,٥ سم ثم أوجد طوله؟

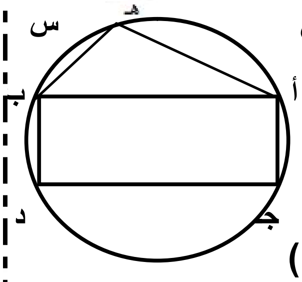
الحل: قياس القوس = $\frac{٥}{٦}$ × ٣٦٠ = ٣٠٠

طول القوس = $\frac{٥}{٦}$ محيط الدائرة = $\frac{٥}{٦}$ ط نق = $\frac{٥}{٦}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٣,٥ = ٩,٧ سم

٣) في الشكل المقابل: أ ب قطر ، د جـ مماس للدائرة م ، جـ د // أ ب فإن : س = ...



٤) أ ب د جـ مستطيل ، س تنتمي للدائرة بحيث ق(ب د) = ق(س ب) اثبت أن : جـ س = أ ب



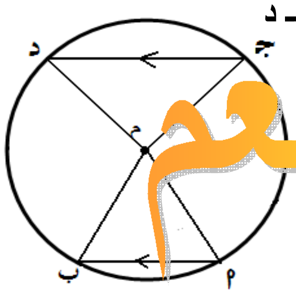
البرهان : ∵ أ ب د جـ مستطيل ∴ ق(أ جـ) = ق(د ب)

∵ ق(ب د)= ق(س ب) ∴ ق(أ جـ) = ق(س ب)

بإضافة ق (أ س) ينتج أن ق(أ جـ) + ق (أ س)= ق(س ب)+ ق (أ س)

∴ ق(جـ أ س)= ق(أ س ب) ∴ جـ س = أ ب

٥) دائرة م طول نصف قطرها ١٥سم ، أ ب // جـ د ، ق (< أ م جـ) = ٨٠° ، طول أ جـ = طول د جـ



أوجد : [١] ق(أ ب) [٢] ق (< أ م ب)

الحل: ∵ < أ م جـ مركزية تقابل القوس أ جـ ∴ ق (أ جـ) = ٨٠

∵ أ ب // جـ د ∴ ق (أ جـ) = ق(د ب) = ٨٠

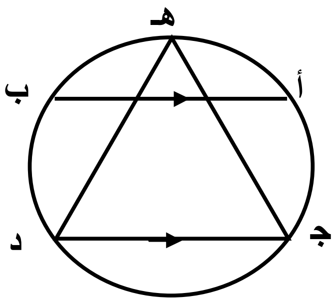
∵ طول أ جـ = طول جـ د ∴ ق(أ جـ) = ق (جـ د) = ٨٠

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠ ∴ ق(أ ب) = ٣٦٠ – [ق (أ جـ)+ ق(جـ د)+ ق (د ب)]= ١٢٠

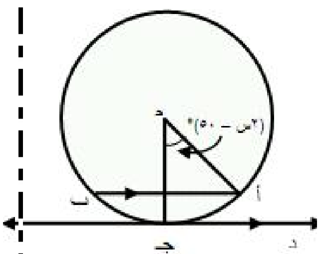
∵< أ م ب مركزية تقابل القوس أ ب ∴ ق (< أ م ب) = ١٢٠

∵ Δ أ م ب فيه م أ = م ب أنصاف أقطار ∴ ق(< م أ ب) = ق(< م ب أ) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$ = ٣٠

٦) في الشكل المقابل : أ ب // جـ د ، هـ منتصف أ ب اثبت أن : هـ جـ = هـ د



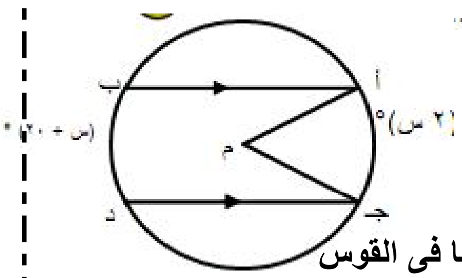
٧) في الشكل المقابل: جـ د مماس ، أ ب // جـ د ، ق (جـ ب) = س° فإن س = ...



٨) قياس الدائرة= .... و قياس نصف الدائرة= .... و قياس ثلث الدائرة= .... و قياس ربع الدائرة= ....

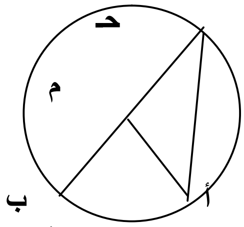
٩) طول الدائرة= .... و طول نصف الدائرة= .... و طول ثلث الدائرة= .... و طول ربع الدائرة= ....

١٠) فى الشكل المقابل :إذا كان : أ ب // جـ د فإن : ق (< أ م جـ) = ...



العلاقة بين الزاوية المحيطية والمركزية

نظرية : قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس



المعطيات (< أ حـ ب) محيطية تحصر القوس (أ ب⌒)

(< أ م ب) مركزية تحصر القوس (أ ب⌒)

المطلوب اثبت أن ق(< أ حـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (< أ م ب)

البرهـان ∵ (< أ م ب) خارجه عن Δ أ م حـ ∴ ق(< أ م ب) = ق (< جـ) + ق (< أ)

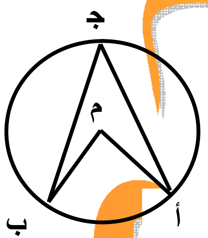
∵ المثلث أ م حـ متساوي الساقين ∴ ق (< جـ) = ق (< أ)

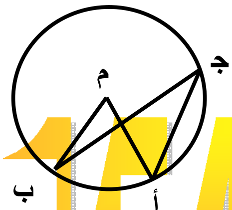
∴ ق(< أ حـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (< أ م ب)

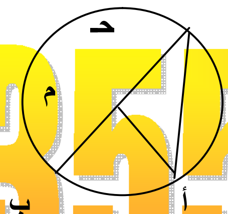
المستفاد من النظرية: فى الأشكال الأتية :

∵(< أ حـ ب) محيطية ، (< أ م ب) مركزية تحصران القوس(أ ب⌒)

∴ ق(< أ حـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (< أ م ب)



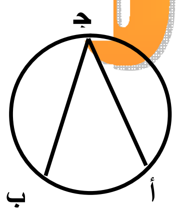




نتائج على النظرية

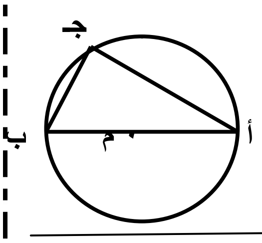
١- قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس القوس المقابل لها

∵ (< أ حـ ب) محيطية تحصر القوس (أ ب⌒) ∴ ق(< أ حـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ ب⌒)



٢- الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

∵ (< أ حـ ب) محيطية تحصر نصف دائرة (أ ب⌒) ∴ ق(< أ حـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (أ ب⌒) = ٩٠



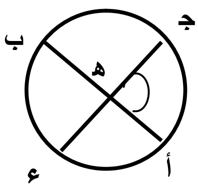
ملاحظات :إذا كانت الزاوية المحيطية تحصر قوساً > من نصف الدائرة كانت منفرجة

إذا كانت الزاوية المحيطية تحصر قوسا < من نصف الدائرة كانت حادة

تمرين مشهور(١): إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل دائرة

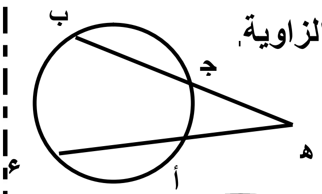
فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع القوسين المقابلين لها .

∵ أ ب ∩ جـ ء = { هـ } ∴ ق (< أ هـ جـ) = $\frac{\text{ق (أ جـ⌒) + ق (ب ء⌒)}}{٢}$



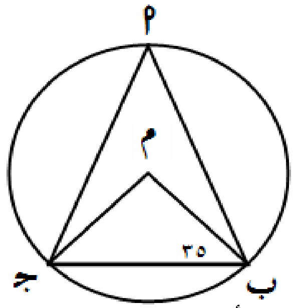
تمرين مشهور(٢): إذا تقاطع وتران فى نقطة خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى

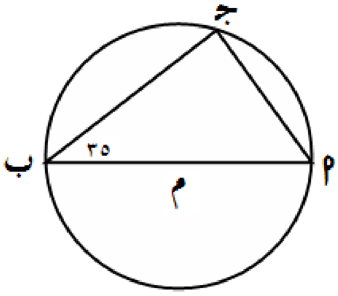
نصف قياس القوس الأكبر مطروحا منه نصف قياس القوس الأصغر الذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.

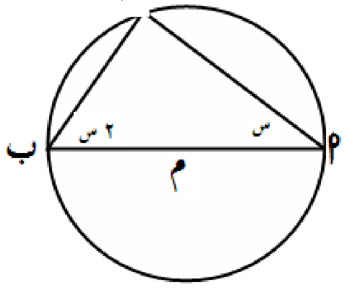


∵ $\overleftarrow{ب جـ}$ ∩ $\overleftarrow{ء جـ}$ = { هـ } ∴ ق (< أ هـ جـ) = $\dfrac{ق \overset{\frown}{(ب ء)} - ق \overset{\frown}{(أ جـ)}}{٢}$

١)

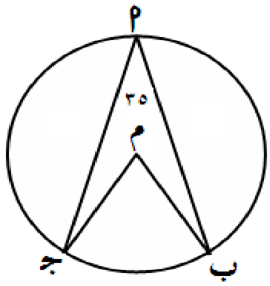


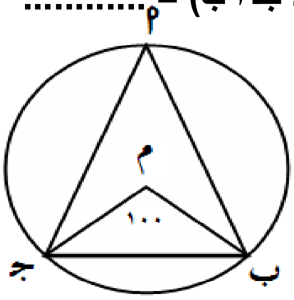


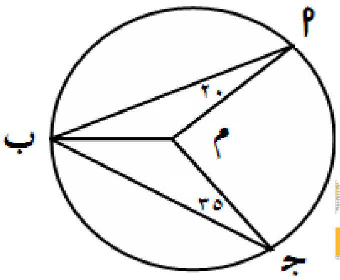


ق(< ب أ جـ) =........... ق(< جـ أ ب) =........... ق(< ب) =...... ، ب جـ =..... أ ب

٢)

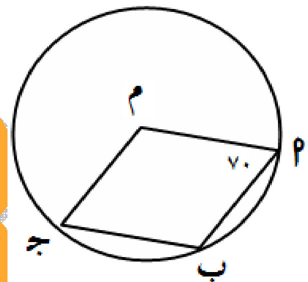


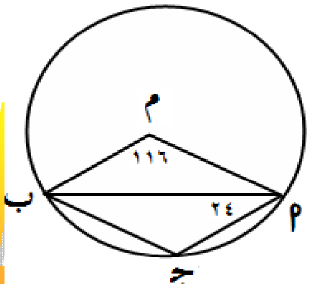


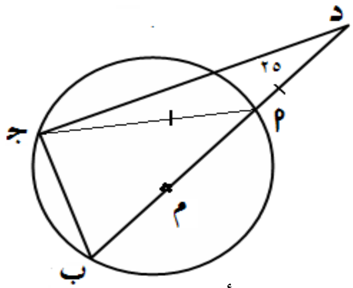


ق(< ب م جـ) = ... ق(< أ جـ ب)=...... ، ق(< أ ب م) = ... ق(< أ م جـ) = ...

٣)

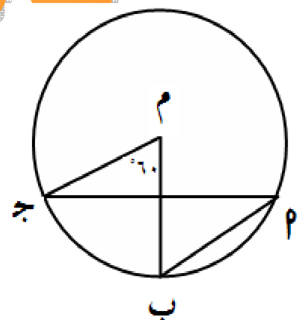


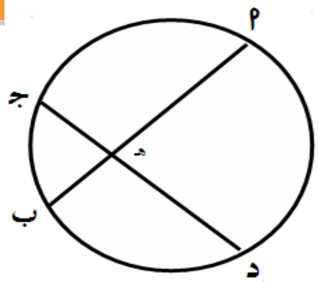


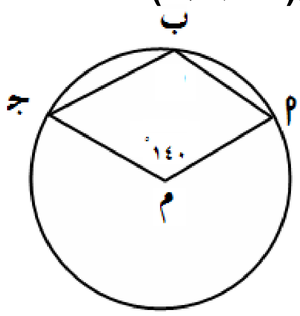


ق(< أ م جـ) = ... ق(< أ ب جـ) = ... ق(< أ ب جـ) = ...

٤)



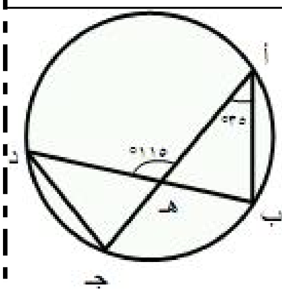


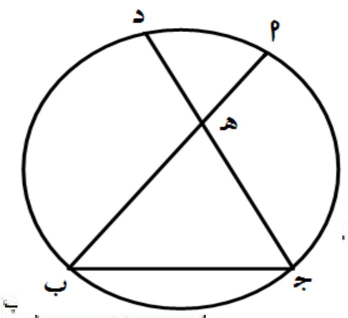


ق(< ب أ جـ) = ... ق$\overset{\frown}{(أ د)}$ = ٧٠°، ق$\overset{\frown}{(ب جـ)}$ = ٣٠، ق(< أ هـ د) = ... ق(< أ ب جـ) = ...

٥) فى الشكل المقابل : $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب د}$ وتران فى دائرة متقاطعان فى هـ ،ق (< أ) = ٣٥° ، ق (< أ هـ د) = ١١٥°

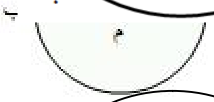
فإن : ق$\overset{\frown}{(أ د)}$ = ...



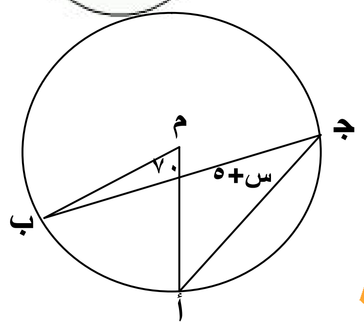


٦) أ ب ، جـ د وتران ، ق(< د هـ ب)= ١١٠ْ ، ق(أ جـ)=١٠٠ أوجد ق (< د جـ ب)

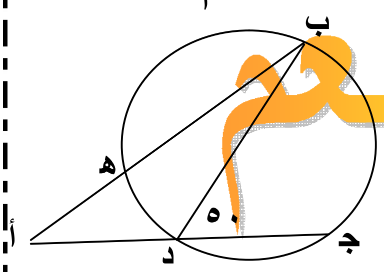
٧) فى الشكل المقابل :أ ب قطر فى الدائرة م ، ق (< أ ب جـ) = ٥٠° فإن : ق (ب جـ) = ...



٨) قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قوس قياسه ٧٠° يساوى ....

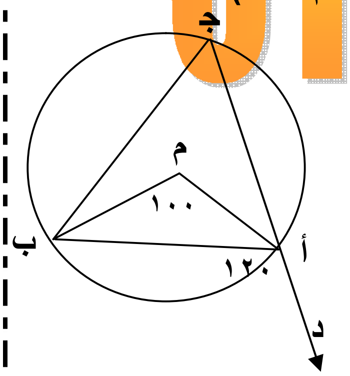


٩) فى الشكل المقابل :ق(< أ م ب)=٧٠ ، ق(< أ جـ ب)= س+٥ أوجد قيمة س ؟

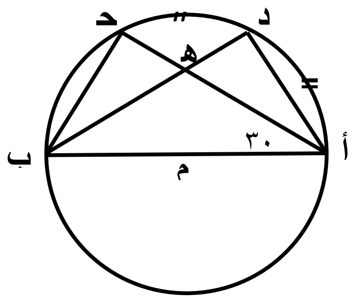


١٠) فى الشكل المقابل : إذا كان ق(د هـ) = ٣٠ ، ق(< ب د جـ) = ٥٠ أوجد ق(< أ) ؟

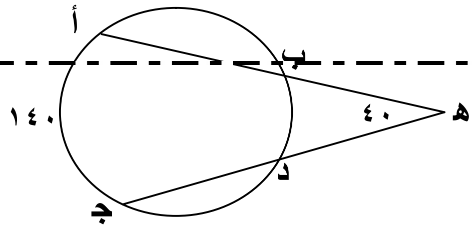
١١) ∆ أ ب جـ داخل دائرة مركزها م ، ق(< ب أ د)= ١٣٠ ، ق(< أ م ب)= ١٠٠ أوجد ق(< م ب جـ)؟



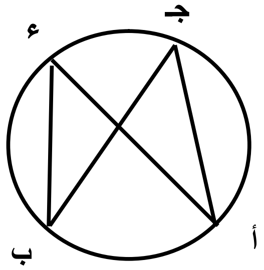
١٢) أ ب قطر في الدائرة م ، د منتصف أ جـ أوجد ق (< ب د جـ) ، ق (< أ ب د) أثبت أن ∆ أ ب هـ متساوى الساقين



١٣)فى الشكل المقابل : ق (ب د) = ...



الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس



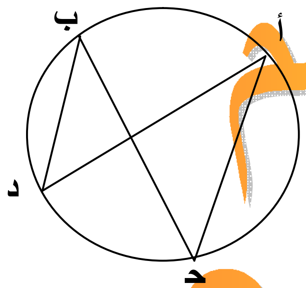
نظرية : الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس

المعطيات	(< أ حـ ب) ، (< أ د ب) زوايتان محيطيتان تحصران القوس (أ ب)
المطلوب	اثبت أن ق (< أ حـ ب) = ق (< أ د ب)
البرهــان	∵ (< أ حـ ب) تحصر القوس (أ ب) ∴ ق(< أ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ق (أ ب) ——— (١)

∵ (< أ د ب) تحصر القوس (أ ب) ∴ ق(< أ د ب) = $\frac{1}{2}$ ق (أ ب) ——— (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن : ق(< أ حـ ب) = ق(< أ د ب)

المستفاد من النظرية:

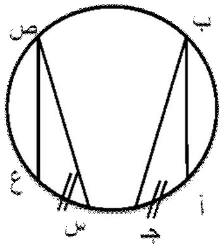


∵(< أ حـ ب) ، (< أ د ب) محيطيتان تحصران القوس (أ ب)

∴ ق (< أ حـ ب) = ق (< أ د ب)

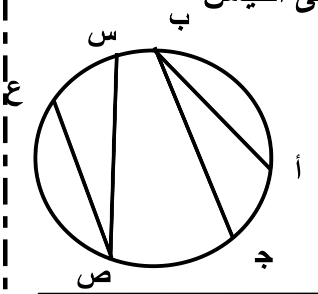
نتائج على النظرية

١- الزوايا المحيطية التي تحصر أقواساً متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة(أو في الدوائر المتطابقة) تكون متساوية فى القياس



∵ ق(أ جـ) = ق(س ع) ∴ ق (< أ ب جـ) = ق (< س ص ع)

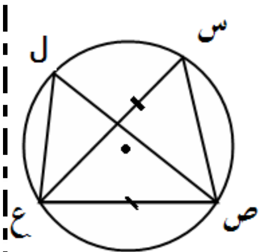
٢-(عكس النتيجة) في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) الزوايا المحيطية المتساوية فى القياس تحصر أقواساً متساوية فى القياس



∵ق (< أ ب جـ) = ق (< س ص ع) ∴ ق (أ جـ) = ق(س ع)

---

١) ص ل ينصف < س ص ع ، ق(< س ع ل)=٣٢ْ ، ص ع = س ع أوجد : ق (< س ع ص)



الحل : ∵ < س ع ل ، < س ص ل (محيطيتان تحصران القوس س ل)

∴ ق (< س ع ل) = ق(< س ص ل) =٣٢

∵ ص ل ينصف < س ص ع ∴ ق(< س ص ل)= ق(< ع ص ل) =٣٢

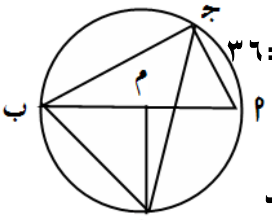
∵ ص ع = س ع ∴ ق(< ص س ع) = ق(< س ص ع) =٦٤

∴ مجموع قياسات زوايا ∆ س ص ع = ١٨٠ ∴ ق (< س ع ص)=١٨٠ – (٦٤ + ٦٤) = ٥٢

٢) أ ب قطر في الدائرة م ، ق(< أ م د) = ٧٢°، ق(< أ ب جـ) = ٢٢° أوجد ق(< د جـ أ) ، ق(ب أ جـ)

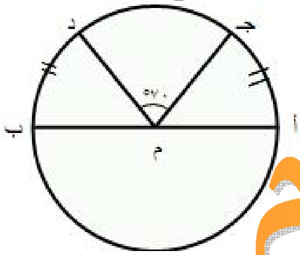
الحل :∵ < أ م د مركزية ، < أ ب د محيطية تحصران القوس(أ د) ∴ ق(< أ ب د)= ٣٦

∵ < د جـ أ ، < أ ب د محيطيتان لهما نفس القوس(أ د) ∴ ق(< د جـ أ) =٣٦



∵ < أ جـ ب محيطية تحصر قوس نصف دائرة أ ب ∴ < أ جـ ب قائمة

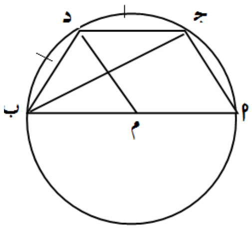
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠ ∴ ق(< ب أ جـ)= ١٨٠ – (٢٢ + ٩٠) = ٦٨



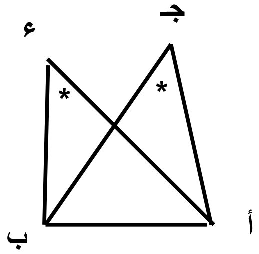
٣) في الشكل المقابل : أ ب قطر في الدائرة م ، ق (< جـ م د) = ٧٠° ، ق(أ جـ) = ق (د ب)

فإن : ق (أ جـ د) = ...

٤) أ ب قطر في الدائرة م،ق(جـ د) = ق(د ب)،ق(< د جـ ب)=٢٥أوجد:ق(< أ جـ د)، ق(< د ب أ) برهن أن م د // أ جـ



عكس النظرية :إذا تساوي قياسا زاويتين مرسومتين علي قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها فانه تمر برأسيهما دائرة تكون هذه القاعدة وترا ً فيها

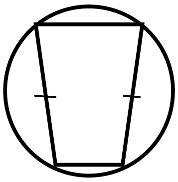
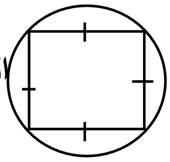
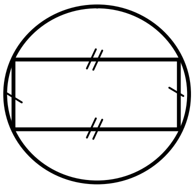


∵ ق (< أ ء ب) = ق (< أ جـ ب) وهما مرسومتان على القاعدة أ ب وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى .

الشكل الرباعي الدائري

هو الشكل الذي تمر بروؤسه دائرة

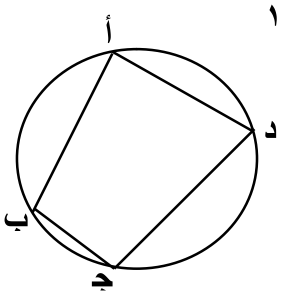
أمثلة لأشكال رباعية دائرية:شبة المنحرف متساوي الساقين  المربع  المستطيل 

خواص الشكل الرباعي الدائري

نظرية : إذا كان الشكل الرباعي دائرياً فان كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتين

المعطيات | أ ب حـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

المطلوب | اثبت أن : ق(> ب) + ق(> حـ) = ١٨٠ ، ق(> أ) + ق(> د) = ١٨٠



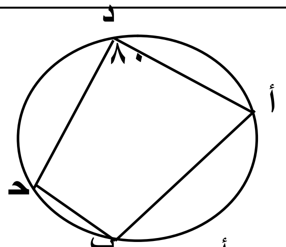
البـرهان | ∵ > أ ب جـ محيطية تحصر القوس (أ د حـ) ، ق(> ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أ د حـ)

∵ > أ ء حـ محيطية تحصر القوس (أ ب جـ) ، ق(> ء) = $\frac{١}{٢}$ ق(أ ب جـ)

∵ ق(أ د حـ) + ق(أ ب جـ) = ٣٦٠ (قياس الدائرة = ٣٦٠)

∴ ق(> ب) + ق(> ء) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أ د حـ) + ق(أ ب جـ)] = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠ = ١٨٠

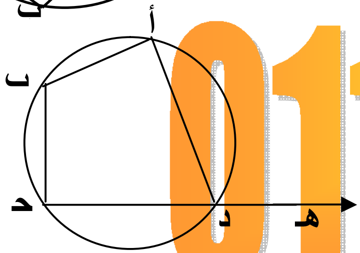
المستفاد من النظرية:



∵ أ ب حـ د شكل رباعي دائرى ،> ب ، > د متقابلتان فيه

∴ ق (> ب) = ١٨٠ - ق (> د) = ١٨٠ – ٨٠ = ١٠٠

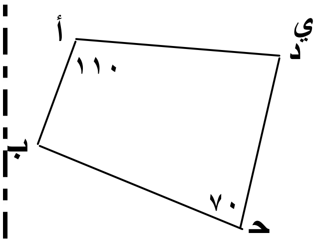
نتيجة ١ : قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائرى يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



∵ أ ب حـ د شكل رباعي دائرى

∴ ق(> أ د هـ) الخارجة = ق(> ب) الداخلة المقابلة للمجاورة لها

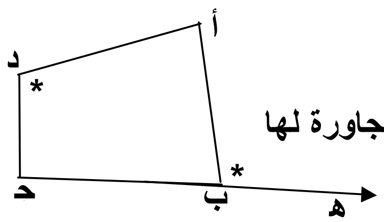
عكس النظرية :في أي شكل رباعي إذا وجدنا زاويتان متقابلتان متكاملتان كان الشكل رباعي دائري



∵ الشكل الرباعي أ ب حـ د فيه ق (> أ) + ق (> جـ) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠ وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب حـ د شكل رباعي دائري

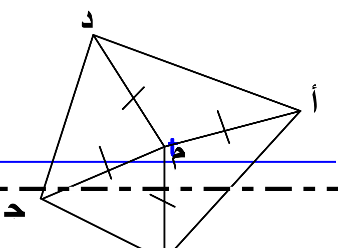
عكس نتيجة : إذا كان قياس زاوية خارجة عن أي شكل رباعي تساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها كان الشكل الرباعي دائرياً



∵ الشكل الرباعى أ ب حـ د فيه ق(> أ ب هـ) الخارجة = ق(> ء) الداخلة المقابلة للمجاورة لها

∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

متي يكون الشكل الرباعي دائرياً :

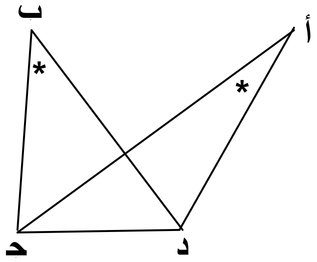


١- إذا وجدت نقطة داخل الشكل تبعد بعداً ثابتاً عن كل رأس من رؤوسه

∵ أ م = ب م = حـ م = د م

∴ الشكل أ ب حـ د رباعي دائري يمكن أن تمر برؤوسه دائرة واحدة مركزها (م)

٢- إذا وجدت زاويتين فى الشكل متساويتان في القياس و مرسومتين علي قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها



∵ ق(< د أ جـ) = ق(< د ب جـ) وهما مرسومتان على القاعدة د جـ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب حـ د رباعي دائري يمكن أن تمر برؤوسه دائرة واحدة

٣- إذا كان مجموع قياسى زاويتين متقابلتين فيه = ١٨٠

٤- إذا كان قياس احدي زواياه الخارجة = قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

---

١) فى الشكل الرباعى الدائرى أ ب جـ د إذا كان : ق(< أ) = $\frac{1}{2}$ق (< جـ) فإن : ق (< جـ) = ...

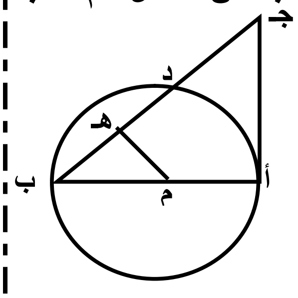
٢) إذا كان الشكل الرباعى دائريًا فإن مجموع قياسى كل زاويتين متقابلتين فيه يساوى ....

٣) الشكل الذى لا تمر دائرة برؤوسه هو ....(مربع ، معين – مستطيل ، مثلث)

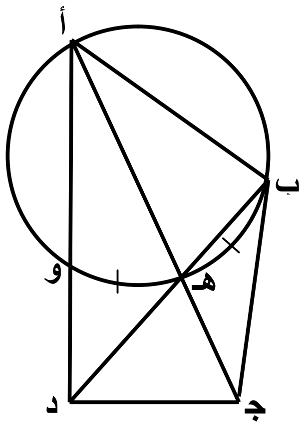
٤)قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعى الدائرى .... قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها .

٥) الدائرة التي تمر برؤوس مثلث تسمى ....

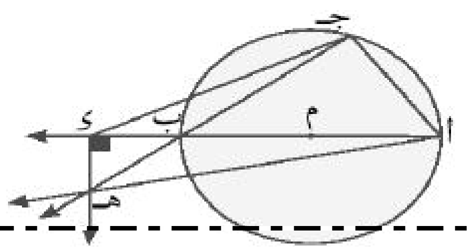
٦) أ ب قطر في الدائرة م ، أ جـ مماس لها عند أ ، هـ منتصف ب د ، أجـ = ٩سم ، ب م = ٦سم أثبت أن الشكل أ م هـ جـ رباعي دائري ثم أوجد طول ب جـ ، أ د ؟



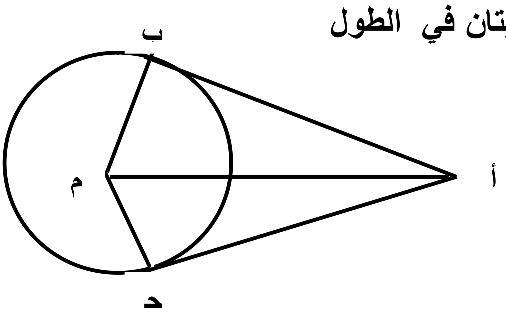
٧) ب جـ مماس ، هـ منتصف ب و ، اثبت أن الشكل أ ب جـ د رباعي دائري



٨) أ ب قطر فى الدائرة م ، د هـ ⊥ أ ب أثبت أن أ جـ د هـ رباعى دائرى ؟



نــــظــــرية : القطعتان المماستان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجها متساويتان في الطول



المعطيات	أ نقطة خارج الدائرة ، أ حـ ، أ ب مماسان للدائرة
المطلوب	اثبت أن : أ ب = أ حـ
العـــمل	نرسم م ب ، م حـ ، م أ
البرهـــان	∵ أ ب مماس ، م ب نصف قطر ∴ م ب ⊥ أ ب
	∵ أ حـ مماس ، م حـ نصف قطر ∴ م حـ ⊥ أ حـ

∴ ق(> أ ب م) = ق(> أ حـ م) = ٩٠

بتطبيق △ أ ب م ، △ أ حـ م

ب م = حـ م (ضلع)

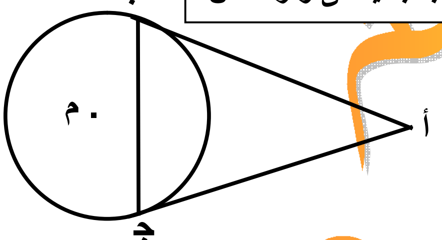
أ م ضلع مشترك (وتر)

ق(> أ ب م) = ق(> أ حـ م) (زاوية قائمة)

∴ △ أ ب م ≡ △ أ حـ م وينتج من التطابق أن : (أ ب = أ حـ)

أستخدام النظرية : ∵ أ حـ ، أ ب مماسان للدائرة

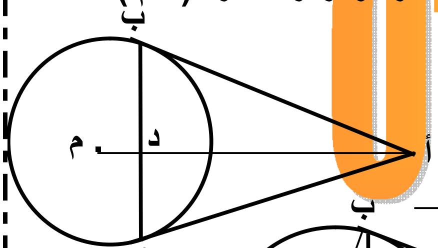
ب جـ يسمى وتر تماس



∴ أ ب = أ حـ

∴ ق(> أ ب جـ) = ق(> أ حـ ب)

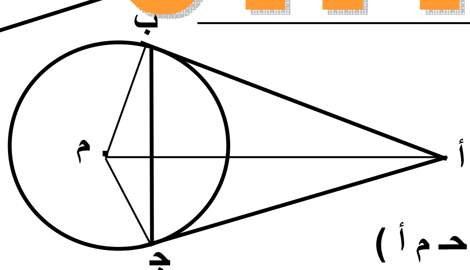
نتيجة: محور وتر التماس هو المستقيم المار بالنقطة المرسوم منها المماسين خارج الدائرة ومركز الدائرة (أ م)



∵ ب جـ وتر التماس

∴ أ م ⊥ ب حـ ، ب د = ب جـ

نتيجة : أ م ينصف (> ب أ جـ) ، (> ب م جـ)



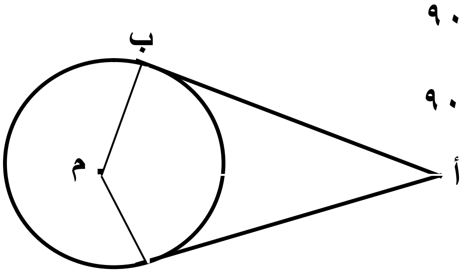
∵ أ حـ ، أ ب مماسان للدائرة

∴ ق(> ب أ م) = ق(> حـ أ م) ، ق(> ب م أ) = ق(> حـ م أ)

نتيجة :الشكل أ ب م حـ (رباعي دائري)

∵ أب مماس ، م ب نصف قطر ∴ م ب ⊥ أ ب ∴ ق(> أ ب م) = ٩٠

∵ أحـ مماس ، م حـ نصف قطر ∴ م حـ ⊥ أ حـ ∴ ق(> أ حـ م) = ٩٠

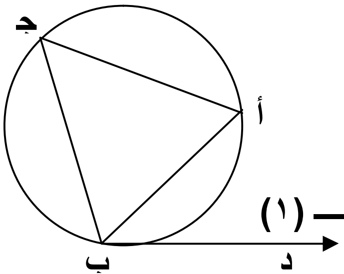


∵ ق (< أ ب م) + ق (< أ حـ م) = ٩٠+٩٠=١٨٠ وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب م حـ (رباعي دائري)

الدائرة الخارجة لمضلع : مركز الدائرة الخارجة لمضلع هو نقطة تقاطع منصفات زوايات الداخلة

نظرية : قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس



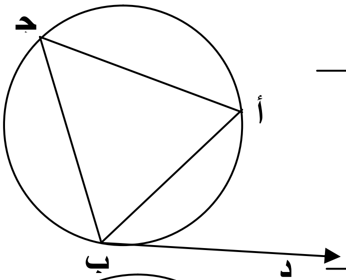
المعطيات | < جـ محيطية تحصر القوس (أ ب) ، < أ ب د مماسية تحصر القوس (أ ب)

المطلوب | اثبت أن ق(< أ جـ ب) = ق(< أ ب د)

البرهـان | ∵ < جـ محيطية تحصر القوس (أ ب) ∴ ق(< أ جـ ب)= نصف ق(أ ب) ـــــ (١)

∵ < أ ب د مماسية تحصر القوس (أ ب) ∴ ق(< أ ب د)= نصف ق(أ ب) ـــــ (٢)

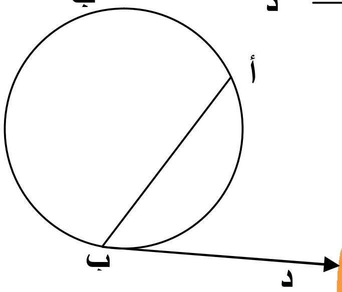
من (١) ،(٢) ينتج أن : ق(< أ جـ ب) = ق(< أ ب د)



أستخدام النظرية : ∵ < أ جـ ب محيطية ، < أ ب د مماسية تحصران القوس (أ ب)

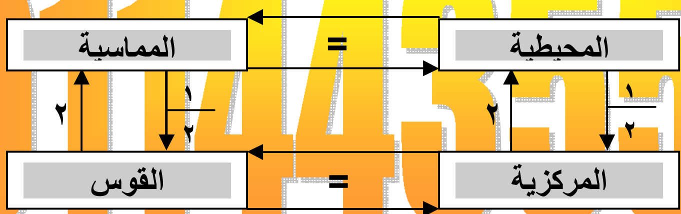
∴ ق(< أ جـ ب) = ق(< أ ب د)

نتيجة : قياس الزاوية المماسية = نصف قياس القوس المقابل لها

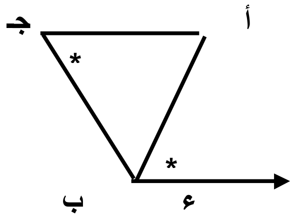


∵ < أ ب د مماسية تحصر القوس (أ ب)

∴ ق(< أ ب د) = نصف (أ ب)



عكس النظرية : إذا رسم شعاع من احدي نهايتي وتر وكان قياس الزاوية بين الشعاع والوتر تساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة علي الوتر من الجهة الاخري كان هذا الشعاع مماساً للدائرة



∵ ق(< أ جـ ب) = ق(< أ ب د)

∴ ب د مماس للدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ